微分方程式の研究

～予防接種の効果～

兵頭　諒祐

研究目的

　本研究では、集団に感染症が広まる様子を表す連立微分方程式を導き、予防接種を行うときと、行わないときでの感染者数の最大値を比較し、予防接種の効果を調べる。

感染症の仮定

- 問題とする病気からすっかり治癒した者には、一生その病気にかからない免疫が作られること
- 潜伏期間は無視できるほど短いこと

集団内の人々の分類

人々の3つのクラス

Ｉ：感染者のクラス

Ｓ：病気にかかりうる人達のクラス

Ｒ：除外者のクラス

感染症の伝染の規則

- 規則1

　人口はある固定レベルNに保たれる。

- 規則2

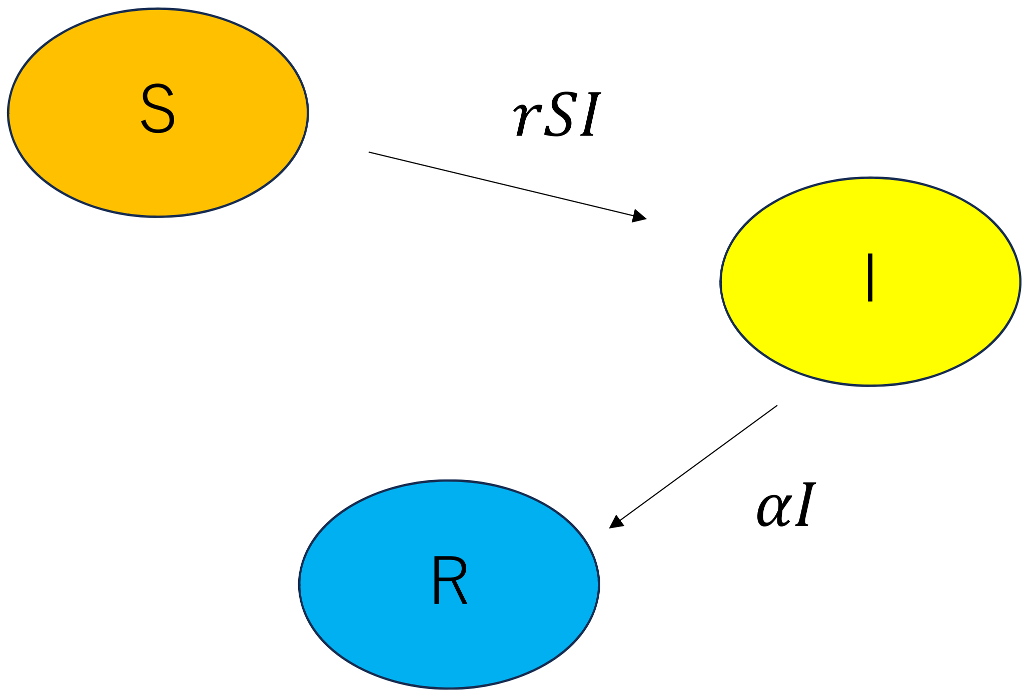
　病気にかかりうる人達の人口の変化率は、（S）の人数と（I）の人数の積に比例する。

- 規則3

　（I）からは、（I）の大きさに比例する率で人数が減る。

感染症の伝染の規則

規則1-3を図式で表すと、以下のようになる。



感染症の伝染の規則

- 規則１－３より、$S(t)$，$I(t)$，$R(t)$は以下の連立微分方程式を満たす。

$$
\begin{cases}
\dfrac{dS}{dt} = -rSI \\
\dfrac{dI}{dt} = rSI - \alpha I \\
\left(\dfrac{dR}{dt} = \alpha I\right)
\end{cases}
\qquad (1)
$$

（$r, \alpha > 0$，rは感染率、αは除外率）

（$t = 0$のとき、$S(0) = S_0$，$I(0) = I_0$とする。）

（$\rho = \frac{\alpha}{r} > 0$とし、$S_0$は$S_0 > \rho$を満たす。）

(1)の軌道

(1)の軌道は、1階微分方程式

$$\frac{dI}{dS} = \frac{rSI - \alpha I}{-rSI} = -1 + \frac{\alpha}{rS}$$

の解曲線である。

この微分方程式の両辺を積分して、

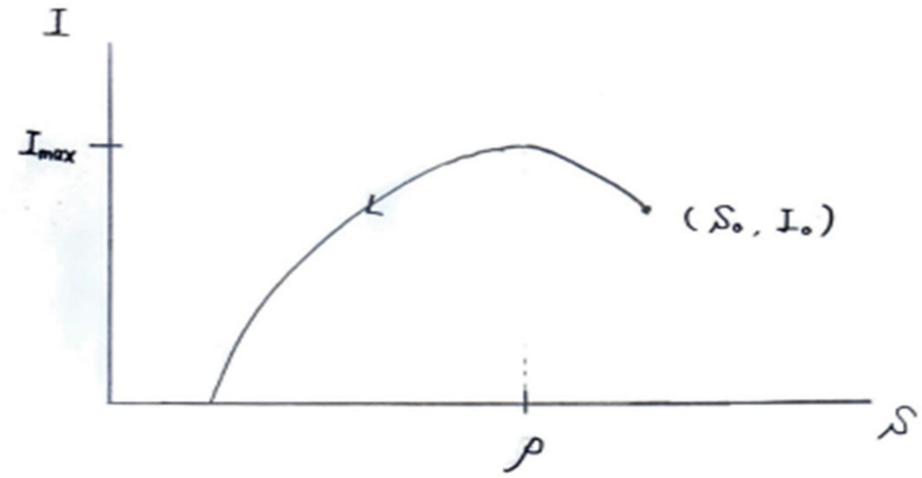
$$I(S) = I_0 + S_0 - S + \rho \log \frac{S}{S_0} \qquad (2)$$

(2)の最大値

予防接種を行わない場合の$I(S)$の最大値は、$S=\rho$のとき、

$$I_{max} = I_0 + S_0 - \rho + \rho \log \frac{\rho}{S_0} \qquad (3)$$

(1)の軌道は、$0 \leq t < \infty$のとき以下の図のような形になる。



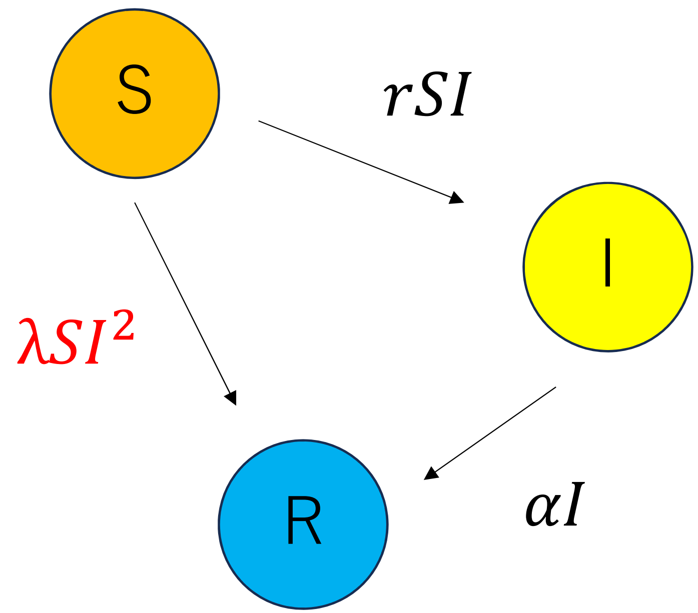
予防接種の連立微分方程式

(S)のメンバーは、(S)の総数と(I)のメンバーの2乗の積に比例する率λで予防接種を受けるとする。

このとき(1)は、

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -rSI - \lambda SI^2 \\ \dfrac{dI}{dt} = rSI - \alpha I \end{cases} \quad (4)$$

$$\left(\frac{dR}{dt} = \lambda SI^2 + \alpha I\right)$$



(4)の軌道

(4)の軌道は、1階微分方程式

$$\frac{dI}{dS} = \frac{(\alpha - rS)I}{(r + \lambda I)SI} = \frac{\alpha - rS}{(r + \lambda I)S}$$

の解曲線である。

この微分方程式の両辺を積分すると、

$$I(S) = I_0 + S_0 - S + \rho \log \frac{S}{S_0} + \frac{\lambda}{2r}\left(I_0{}^2 - I(S)^2\right) \qquad (5)$$

曲線(5)の振舞い

- $\frac{dI}{dS} = \frac{\alpha - rS}{(r+\lambda I)S}$より、$I'(S)$の値は、$S < \rho$のとき正、$S > \rho$のとき負。
したがって、$I(S)$は、$S < \rho$のとき増加し、$S > \rho$のとき減少する。

- $S \to 0$のとき、$I(S) \to -\infty$より、
  $0 < S_\infty < S_0$，$I(S_\infty) = 0$をみたすただ１つの点S_∞が存在し、
  $S_\infty < S \leq S_0$のとき、$I(S) > 0$となる。

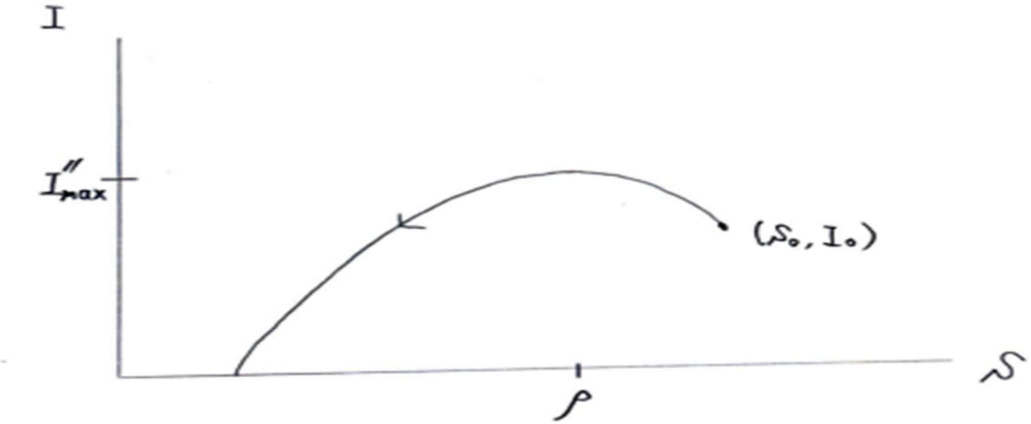
- (4)より、$I = 0$のとき、$\frac{dS}{dt}$，$\frac{dI}{dt}$がともに０になるため、
  点$(S_\infty, 0)$は(5)の平衡点。

曲線(5)の振舞い

- 増減表

$\boldsymbol{S}$	$(\boldsymbol{0})$	$\cdots$	$\boldsymbol{\rho}$	$\cdots$	$\boldsymbol{S_0}$
$I'(S)$		$+$	0	$-$	
$I(S)$	$-\infty$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	I_0

- (5)の軌道$(0 \leq t < \infty)$



(5)の最大値

予防接種を行う場合の$I(S)$の最大値は、$S=\rho$のとき、

$$I''_{max} = I_0 + S_0 - \rho + \rho \log \frac{\rho}{S_0} + \frac{\lambda}{2r}\left({I_0}^2 - {I''_{max}}^2\right)$$

$$= I_{max} + \frac{\lambda}{2r}\left({I_0}^2 - {I''_{max}}^2\right) \qquad (6)$$

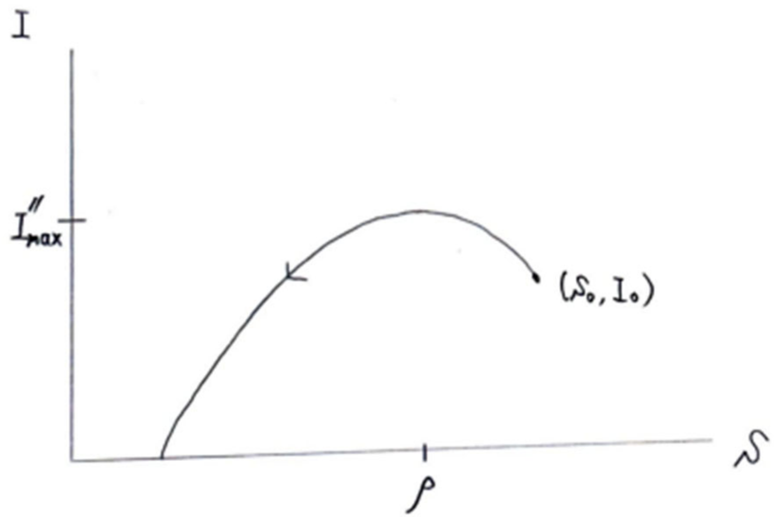
予防接種の効果

(3)，(6)より、$I_{max} > I''_{max}$

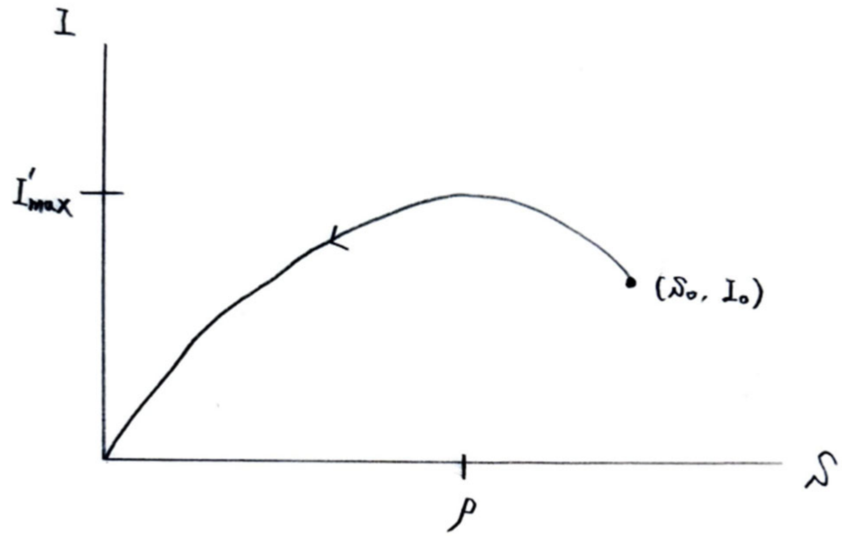
$(I''_{max} > I_0)$

以上のことから、予防接種によりピーク時の感染者の人数を抑えられたため、予防接種は効果があると考えられる。

予防接種の条件による違い



予防接種λSI^2



予防接種λS

具体例

- 以上の結果を具体的な数値を用いて比較していく。

　集団内の人口を$N = 100$人とし、$t = 0$において10人が感染症に感染するとする。

$$(I_0 = 10,\ S_0 = 90)$$

具体例

- 予防接種を行わない場合

まず、感染率$r = 0.05$，除外率$\alpha = 0.5$とすると、

$\rho = \frac{\alpha}{r} = \frac{0.5}{0.05} = 10(> 0)$となる。($S_0 = 90 > 10 = \rho$を満たす。)

(3)より、$\left(I_{max} = I_0 + S_0 - \rho + \rho \log \frac{\rho}{S_0}\right)$

$$I_{max} = 10 + 90 - 10 + 10 \log \frac{10}{90}$$

$$= 90 - 21.972 = 68.028$$　となる。

具体例

- 予防接種を行う場合($\lambda S I^2$)

まず、$\lambda = 0.1 (> 0)$とする。

(6)より、$\left(I''_{max} = I_{max} + \frac{\lambda}{2r}\left({I_0}^2 - {I''_{max}}^2\right)\right)$

$$I''_{max} = 68.028 + \frac{0.1}{0.1}\left(100 - {I''_{max}}^2\right)$$

$$ {I''_{max}}^2 + I''_{max} - 168.028 = 0$$

$$I''_{max} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 672.112}}{2} \qquad \left(I''_{max} > 0\right)$$

$$= \frac{-1 + 25.944}{2} = 12.472$$となる。

よって、$I_{max} > I''_{max}$となる。

参考文献

- 「微分方程式　下　その数学と応用」
  M.ブラウン　著
  一樂重雄/河原正治/河原雅子/一樂祥子　訳　（丸善出版2012）